روش‌هایی برای طرح مسئله در هندسه

لری هوهن*
مترجمان: ابراهیم ریحانی
دانشیار دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
مهدیه اجدادی
مدرس ریاضی و دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

حل مسئله در دهۀ ۱۹۸۰ مورد توجه چشمگیری قرار گرفت. در حالی‌که به همتای ضروری آن، **طرح مسئله** توجه چندانی نشد؛ اگرچه در این مورد برخی از استثناهای قابل ذکر، از جمله آثار **براون** و **والتر** (۱۹۸۳)، **کلامکین** (۱۹۸۶)، و البته **پولیا** (۱۹۷۳) وجود دارند.

در این مقاله از یک قضیۀ معمولی هندسه استفاده شده است و مسائلی در مورد کاربرد آن مطرح شده‌اند. شیوه‌های ارائه شده در این مقاله به خوبی برای طرح مسائل امتحانات هندسه، مسابقات هندسه و مسائل روزمره (مورد نیاز در کلاس درس) برای یک معلم ریاضیات، مفید خواهد بود. اگرچه این روش‌ها را در درجۀ اول برای معلمان مدرسه‌های دورۀ متوسطه در نظر گرفته‌اند، با این حال دانش‌آموزان خلاق در هندسه می‌توانند از آن‌ها برای ساخت یافته‌های ریاضی خود استفاده کنند.

ابتدا فرض کنید که ما مطالعۀ یک واحد درسی در دایره‌ها را به پایان رسانده‌ایم. در ادامه می‌خواهیم درک دانش‌آموزان خود را از قضیۀ زیر بیازماییم:

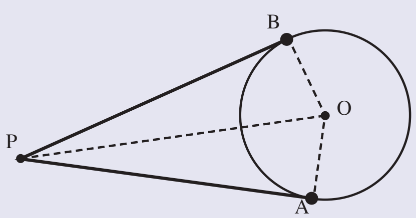
قضیه: اگر دو مماس از نقطه‌ای خارج از یک دایره بر آن دایره رسم شوند، دو قطعۀ مماس هم‌نهشت هستند.

یک اثبات معمول این قضیه که در شکل ۱ می‌بینیم، این است که ثابت کنیم: $\overset{\Delta}{PAO} \cong \overset{\Delta}{POB}$ یک اثبات دیگر این است که نشان دهیم:

$$m\angle PAB = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{AB}) = m\angle PBA$$ ۱

(M به مفهوم اندازه است)

پس $\overset{\Delta}{APB}$ متساوی‌الساقین است. بنابراین: PA=PB.



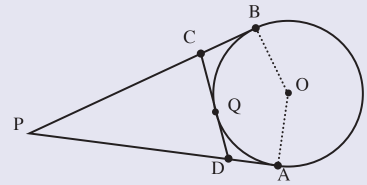
شکل ۱. اثبات PA=PB

مطمئناً می‌توانیم انواعی از تمرینات محاسباتی را برای ارزیابی درک دانش‌آموزان از این قضیه ارائه دهیم (و البته استفاده از برخی از آن‌ها خوب است). اما ما مسائلی را ترجیح می‌دهیم که بیشتر هندسی باشند تا حسابی. به عبارت دیگر، ما می‌خواهیم دانش‌آموزان از قضیه برای اثبات نتایج مرتبط استفاده کنند.

یک روش برای به دست آوردن «نتایج مرتبط» افزودن کمی پیچیدگی به شکل است. برای مثال، فرض کنید، مماس دیگری برای دایره، مانند آنچه در شکل ۲ نمایش داده شده است، رسم کرده‌ایم. سپس مسئله‌ای را ارائه می‌دهیم که می‌تواند در دو سطح متفاوت از دشواری بیان شود که هریک از آن‌ها برای حل، به استفاده‌های یکسان از قضیه نیاز دارند.

مسئلۀ ۱. فرض کنید $\overline{CD}$، $\overline{PB}$ و $\overline{PA}$ مماس‌هایی بر دایره‌اند؛ همانند آنچه در شکل ۲ نشان داده شده است. نشان دهید:

PA+PB=PD+DC+CP



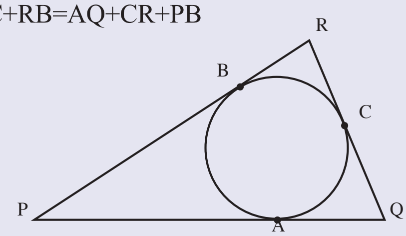
شکل ۲. اثبات PA+PB=PD+DC+CP

مسئلهٔ ۲. فـرض کنید $\overline{PB}$ و $\overline{PA}$ مماس‌هایی بر دایره‌اند و Q یک نقطهٔ دلخواه روی کمان AB است. اگر CD مماسی بر دایره در نقطهٔ Q باشد، آن‌گاه محیط $\overset{\Delta}{PCD}$ ثابت است.

راه دوم برای افزایش پیچیدگی شـکل ۱، افزودن یک مماس دیگـر ولی در یک موقعیت متفاوت اسـت؛ مانند آنچه در شـکل ۳ می‌بینید. دو پیشـنهاد، اما دوباره در سـطوح کاملاً متفاوت از پیچیدگی، به سرعت به ذهن می‌رسد.

مسئلهٔ ۳. اگر A، B و C نقاط تماس اضلاع PQ، RP و QR از مثلث PQR بر دایره باشند، آن‌گاه:

PA+QC+RB=AQ+CR+PB

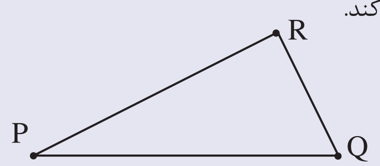


شکل ۳. اثبات PA+QC+RB=AQ+CR+PB

مسئلهٔ ۴. نقاط X، Y و Z را روی اضلاع مثلث دلخواه PQR در نظر بگیرید (شکل ۴)، به طوری که:

PX=PZ، QX=QY، RY=RZ

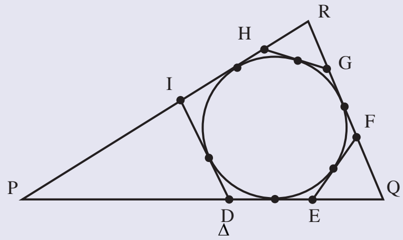
راه‌حل این است که دایره‌ای در مثلث PQR محاط کنید. شکل ۴ راه دیگری برای طرح مسـئله پیشنهاد می‌دهد. شکل را ساده‌تر کنید. این ساده‌سـازی، حل‌کنندهٔ مسئله را وادار می‌کند که نقاط ناپیدا را پیدا کند.



شکل ۴. تعیین X، Y و Z به‌طوری‌که PX=PZ، QX=QY، RY=RZ

راه سوم برای خلق یک مسئله، ترکیب دو یا چند نتیجه است. اینجا ما می‌خواهیم شکل ۲ و شکل ۳ را برای به دست آوردن مسئله‌های زیر ترکیب کنیم:

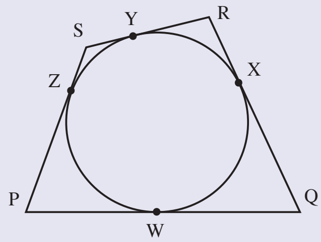
مسـئلهٔ ۵. فـرض کنیـد مثلـث PQR و شـش‌ضلعی DEFGHI بر یک دایره محیط شـده‌اند؛ مانند آنچه در شـکل ۵ نشـان داده شده اسـت. آن‌گاه مثلث PQR، محیطی برابر ترکیب محیط مثلث‌های RHG، QFE و PDI خواهد داشـت. اثبات آن با سه بار به‌کار بردن مسئلهٔ ۱ حاصل می‌شود.



شکل ۵. محیط $\overset{\Delta}{PQR}$ برابر است با مجموع محیط‌های $\overset{\Delta}{RHG}$، $\overset{\Delta}{QFE}$، $\overset{\Delta}{PDI}$

روش چهارم برای طرح مسائل ریاضی تعمیم نتایج قبلی اسـت. برای مثال، برای تعمیم مسئلهٔ ۳، با تغییر مثلث محیط بر دایره به چهارضلعی محیطی دایره شروع می‌کنیم. بدین ترتیب در شکل ۶ می‌بینیم که:

PW+QX+RY+SZ=WQ+XR+YS+ZP



شکل ۶. اثبات PQ+RS=QR+SP

در ادامـه برای به دسـت آوردن نتایج قابل مقایسـه، عبارت را بـه «nضلعی محیط بر دایره» تغییر می‌دهیـم. با این توصیف، چهارضلعی به‌طور خاص مورد توجه است؛ چون از تساوی‌های:

PW+QX+RY+SZ=PW+WQ+RY+YS=PQ+RS

و

WQ+XR+YS+ZP=QX+XR+SZ+ZP=QR+SP

نتیجه می‌شود:

PQ+RS=QR+SP

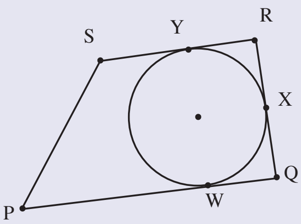
این نتیجه به‌صورت جالبی مسئلهٔ دیگری را طرح می‌کند:

مسئلهٔ ۶. اگـر یک چهارضلعی بر دایره‌ای محیط شود، آن‌گاه مجموع طول‌های هر جفت از اضلاع مقابل با هم برابرند.

در تعمیم مسائل برخی مشـکلات پیش می‌آیند. فرض کنید می‌خواهیم مسئلهٔ ۴ را برای چهارضلعی‌ها تعمیم دهیم.

مسـئلهٔ ۷. نقطه‌هـای X، Y، Z و W را روی ضلع‌هـای چهارضلعی دلخواه PQRS چنان تعیین کنید که:

PZ=PW، QW=QX، RX=RY، SY=SZ



شکل۷. تعیین Z,Y,X,W به‌طوری که:

$$PW+QX+RY+SZ=WQ+XR+YS+ZP$$

شکل ۷ نشان می‌دهد که مسئلهٔ ۷ همیشه قابل حل نخواهد بود. روش پنجمی برای طرح یک مسئلهٔ ریاضی، در نظر گرفتن عکس نتایج قبلی است. برای مثال عکس مسئلهٔ ۶ به قرار زیر است:

مسئلهٔ ۸. اگر مجموع طول‌های هر جفت از اضلاع مقابل یک چهارضلعی محدب برابر باشند، آن‌گاه می‌توان دایره‌ای در این چهارضلعی محاط کرد.

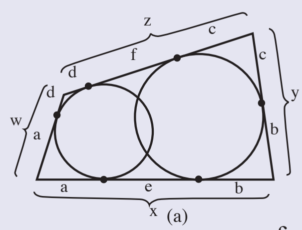
اثبات. ابتدا دایره‌ای در چهارضلعی داده شده محاط می‌کنیم، به‌طوری‌که بر سه ضلع از این چهارضلعی مماس شود. سپس دایرهٔ دیگری بر ضلع چهارم و دو تا از اضلاع قبلی مماس می‌کنیم. دو نمونه در شکل ۸ نشان داده شده‌اند. بخش‌های غیرمتداخل با a، b، c، d، e و f و اضلاع با x، y، w و z مشخص شده‌اند.

چون: $w+y=x+z$، در هریک از دو شکل خواهیم داشت:

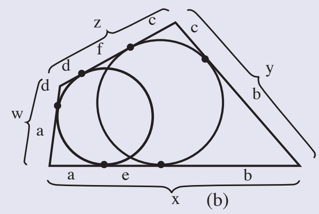
$(a+d)+(b+c)=(a+e+b)+(c+f+d)$

با ساده‌سازی داریم: $e+f=۰$ بنابراین: $e=f=۰$ در نتیجه دو دایره یکسان هستند که اثبات را تکمیل می‌کند.

در حل مسئلهٔ ۸، ما دو دایره را در یک چهارضلعی در نظر گرفتیم. حالا اگر دو دایره توسط یک خط مورب مجزا جدا شوند، چه پیش خواهد آمد؟ ممکن است دو دایره بر این خط مورب، مماس باشند.



شکل ۸. اثبات $e=f=۰$



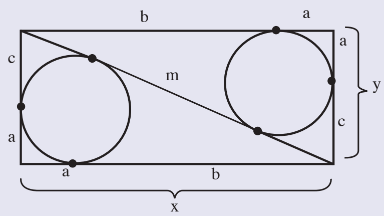
در طرح مسئله ابتدا نمی‌خواهیم خیلی کلی برخورد کنیم، بنابراین یک مستطیل مانند آنچه در شکل ۹ نشان داده شده است، با شرط $x>y$، در نظر می‌گیریم.

چون: $m+c=b$، بنابراین:

$m=b-c=(a+b)-(a+c)=x-y$

یعنی نتیجهٔ زیر را داریم:

مسئلهٔ ۹. اگر دایره‌هایی که در دو مثلث به وجود آمده، توسط یک قطر و دو ضلع مجاور یک مستطیل محاط شده باشند؛ طول قطعهٔ میانی (قطر) با تفاضل یک جفت از اضلاع مجاور مستطیل برابر است.



شکل ۹. اثبات $m=x-y$

از آنجا که از هیچ‌یک از خواص زاویهٔ قائمه در مسئلهٔ ۹ استفاده نشده است، ما می‌توانیم «متوازی‌الاضلاع» را به جای «مستطیل» برای به دست آوردن آنچه که ظاهراً یک مسئلهٔ تازه به نظر می‌رسد، جایگزین کنیم. آیا در ادامه می‌توانیم «ذوزنقه» یا بعضی چندضلعی‌های دیگر را با «متوازی‌الاضلاع» جایگزین کنیم؟ این سؤال در پیشنهاد بعدی پاسخ داده می‌شود.

مسئلهٔ ۱۰. نقطه‌های x، y، z و w طول‌های اضلاع یک چندضلعی محدب دلخواه هستند؛ همانند آنچه در شکل ۱۰ نشان داده شده است. فرمولی برای m برحسب اضلاع x، y، z و w بیابید.

با استفاده از قضیهٔ اصلی‌مان در مورد مماس‌ها داریم:

$e=f+m$، $b=c+m$

(توجه کنید که در شکل $b\geq c$ ، $e\geq f$ فرض می‌شود). این تساوی‌ها می‌توانند به‌صورت $m=e-f$ و $m=b-c$ دوباره‌نویسی شوند. بنابراین:

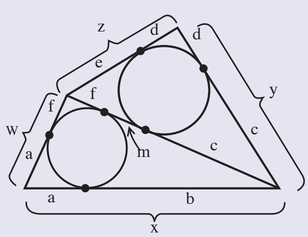
$۲m=(e-f)+(b-c)=(e+b)-(f+c)=(e+d+b+a)-(f+a+c+d)=(z+x)-(w+y)$

در نتیجه:

$$m=\frac{x+z}{۲}-\frac{w+y}{۲}$$

توجه کنید که اگر در شکل ۱۰، m برابر صفر باشد، آن‌گاه:

$w+y=x+z$



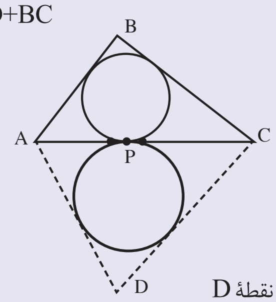
شکل ۱۰. اثبات $m=\frac{x+z}{۲}-\frac{w+y}{۲}$

بنابراین ما به‌صورت «تصادفی» مسئلهٔ پیشنهادی دیگری را کشف کرده‌ایم. چون مطالب تصادفی طبق تعریف بدون طرح قبلی هستند، ما نمی‌توانیم از این رویکردها به‌عنوان روش‌های قابل اعتماد برای طرح مسئله استفاده کنیم؛ ولی می‌خواهیم در مورد فرصت‌ها هوشیار باشیم (به‌عنوان مثال، ضدیخ به‌صورت تصادفی کشف شد). پیشنهاد ما به شرح زیر است:

مسئلهٔ ۱۱. اگر دایره‌های محاطی در دو مثلث به وجود آمده توسط قطر یک چهارضلعی بر هم مماس باشند، آن‌گاه دایره‌ای می‌تواند در این چهارضلعی محاط شود و برعکس. با ساده‌سازی شکل ۱۰ پیشنهاد دیگری خواهیم داشت:

مسئلهٔ ۱۲. اگر AC بزرگ‌ترین ضلع در مثلث ABC باشد، نقطهٔ D را بیرون مثلث ABC طوری مشخص کنید که:

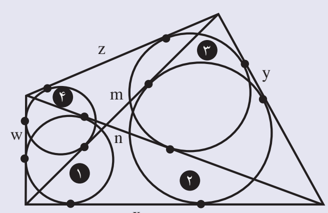
AB+CD=AD+BC



شکل ۱۱. تعیین نقطهٔ D

ابتدا دایره‌ای در مثلث ABC در شکل ۱۱ محاط می‌کنیم. فرض کنید P نقطهٔ تماس با ضلع AC باشد. در P دایره‌ای خارج از مثلث ABC، ولی مماس بر AC می‌سازیم. از A و C مماسی بر این دایره رسم می‌کنیم و آن‌ها را ادامه می‌دهیم تا در نقطهٔ D یکدیگر را قطع کنند. اگر این مماس‌ها موازی باشند، آن‌گاه دایرهٔ کوچک‌تری تضمین می‌کند که آن‌ها در نقطهٔ D یکدیگر را قطع می‌کنند؛ مانند آنچه در شکل ۱۱ نشان داده شده است، در حالی‌که دایره‌ای بزرگ‌تر به یک چهارضلعی غیرمحدب منجر می‌شود (به جز یک استثنا). در مسئلهٔ ۱۱، D یک نقطهٔ مطلوب است.

روش دیگر برای طرح مسئله، بهره‌گیری از «تقارن» در یک مسئلهٔ طرح شده است. برای مثال، در مسئله و شکل ۱۰، ما می‌توانیم از قطر دیگری از چهارضلعی استفاده کنیم (شکل ۱۲) و به‌طور مشابه $n=\frac{(x+z)}{۲}-\frac{(w+y)}{۲}$ به دست می‌آید. بدین



شکل ۱۲. اثبات m=n

ترتیب داریم: n=m. بنابراین ما به مسئله ۱۳ می‌رسیم:

مسئلهٔ ۱۳. فرض کنید ۱، ۲، ۳ و ۴ چهار دایرهٔ متداخل محاط در مثلث‌های به وجود آمده توسط قطر و دو ضلع متوالی یک چهارضلعی محدب باشند (مانند شکل ۱۲). m و n را طول قطعهٔ میانی قطر بین نقطه‌های تماس دایره‌های مماس بر همان قطر در نظر بگیرید. ثابت کنید: n=m.

همان‌طور که خواننده می‌تواند تشخیص دهد، مسائل پیچیده‌تر شده‌اند. بنابراین طراح مسئله ممکن است بخواهد در جهت دیگری کار کند. برای مثال، کدام‌یک از مسائل قبلی همتای متناظری در موارد زیر دارد؟

۱. چهارضلعی‌های غیرمحدب (مقعر)؛

۲. پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی‌های محدب و مقعر؛

۳. کره‌ها و چندوجهی‌ها؛

۴. قضیه: «اگر از نقطه‌ای خارج دایره، دو قاطع بر دایره رسم شوند، آن‌گاه حاصل یکی از این قاطع‌ها و بخش بیرونی‌اش برابر است با حاصل قاطع دیگر و بخش بیرونی‌اش.»

در طرح این مسائل ما از تکنیک‌هایی استفاده کرده‌ایم که به‌طور خاص برای حل مسئله مفید هستند؛ برای مثال: حالت‌های خاص، تعمیم، مسائل مرتبط، تقارن، معکوس‌ها، نمادگذاری مناسب، تصادف، نتایج قبلی، شکل‌های مفید، بازگشت به عقب، الگوها و غیره.

همهٔ آنچه که یک نفر نیاز دارد برای آنکه طراح مسئله شود، اول این است که حل‌کنندهٔ مسئله باشد. این دو فرایند تفکیک‌ناپذیر هستند.

پی‌نوشت

* لری هوهن، استاد ریاضی و رایانه در دانشگاه ایالتی آستین پی در کلارکس ویل است. او علاقهٔ خاصی به هندسه، تئوری عددها، حل مسئله و شجره‌نامه دارد.

منبع اصلی

Hoehn, L. (1991). Problem posing in geometry. *The Mathematics Teacher, 84*(1), 10-14.

منابع

Brown, Stephen I., and Marion I. Walter. *The Art of Problem Posing*. Philadelphia: Franklin Institute Press, 1983.

Klamkin, Murray S. "The Olympiad Corner: 80." Crux Mathematicorum 12 (December 1986): 263-81.

Polya, George. How to Solve It. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1973.